УДК 519.688:511

В. С. Малаховский

ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ОБОБЩЕННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

Дано понятие обобщенной арифметической прогрессии степени $k \in \mathbb{N}$ и разностью d. Для $k = \overline{1,7}$ получены формулы n-го члена такой прогрессии, а для k = 1, 2, 3 — формулы суммы n ее первых членов. Рассмотрены прогрессии $M_{p,d}^{(k)}$, первый член которых — простое число p, а разность — четное положительное число $d = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$). Они порождают подмножества $M_{h,p,d}^{(k)}$ h простых чисел ($h \in \mathbb{N}$). Для $k \leqslant 20$, $p \leqslant 95467$, $d \leqslant 108$ найдены все подмножества $M_{h,p,d}^{(1)}$, содержащие $h \geqslant 15$ простых чисел. Установлены некоторые свойства, связывающие показатель k обобщенной арифметической прогрессии и ее разность d для $2 \leqslant k \leqslant 60$, $p < 10^{14}$, $h \geqslant 5$.

The concept of the generalized arithmetical progression of the power $k \in \mathbb{N}$ and difference d is given. For $k = \overline{1,7}$ formulas of n^{th} member of such progressions and for k = 1, 2, 3 formulas for the sum of the first n its members are obtained. Progressions $M_{p,d}^{(k)}$ with the first member prime number p and difference being a positive even number $d = 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) are considered. Such progressions define subsets $M_{h,p,d}^{(k)}$ of h prime numbers ($h \in \mathbb{N}$). For $k \le 20$, $p \le 95467$, $d \le 108$ all subsets $M_{h,p,d}^{(1)}$ with $h \ge 15$ prime numbers are obtained. Some properties that connect the power k of generalized arithmetical progression and its difference d for $2 \le k \le 60$, $p < 10^{14}$, $h \ge 5$ are established.

Ключевые слова: прогрессия, арифметическая, обобщенная, простое число, показатель, подмножество, многочлен.

Key words: progression, arithmetical, generalized, prime number, exponent, subset, polynom.

1. Обобщенная арифметическая прогрессия степени *k*

Определение 1.1. *Обобщенной арифметической прогрессией (ОАП) степени k* называется последовательность

$$\{a_{1,d}^{(k)}, a_{2,d}^{(k)}, \ldots, a_{n,d}^{(k)}, \ldots\}, \tag{1.1}$$

определяемая рекуррентной формулой

$$a_{n+1,d}^{k} = a_{n,d}^{k} + d \cdot n^{k}. \tag{1.2}$$

Число $d \neq 0$ — *разность* прогрессии (1.1). При $k = 1$ прогрессия (1.1) называется *линейной*, при $k = 2$ — *квадратичной*, при $k = 3$ — *кубичной*. □

Из формулы (1.2) следует, что обычная арифметическая прогрессия является прогрессией нулевой степени.

Обозначим символом $S_{n,d}^{k}$ сумму n первых членов ОАП (1.1). Используя формулу Бернулли $1^m + 2^m + \ldots + n^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} C_{m+1}^{k} B_k \left(n+1\right)^{m+1-k}$, где B_k— числа Бернулли, определяемые рекуррентной формулой $B_0 = 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k B_k$ $(k \geqslant 2)$ (см.: [4, с. 88]), находим $a_{n,d}^{(k)}$ для $k = \overline{1,7}$ и $S_{n,d}^{k}$ для $n = 1, 2, 3$:

$$a_{n,d}^{(1)} = a_{1,d}^{(1)} + \frac{d}{2}n(n-1), \quad S_{n,d}^{(1)} = n\left(a_{1,d}^{(1)} + \frac{d}{6}(n^2-1)\right),$$

$$a_{n,d}^{(2)} = a_{1,d}^{(2)} + \frac{d}{6}n(n-1)(2n-1), \quad S_{n,d}^{(2)} = n\left(a_{1,d}^{(2)} + \frac{d}{12}n(n^2-1)\right),$$

$$a_{n,d}^{(3)} = a_{1,d}^{(3)} + \frac{d}{4}n^2(n-1)^2, \quad S_{n,d}^{(3)} = n\left(a_{1,d}^{(3)} + \frac{d}{60}(n^2-1)(3n^2-2)\right),$$

$$a_{n,d}^{(4)} = a_{1,d}^{(4)} + \frac{d}{30}n(n-1)(2n-1)(3n^2-3n-1), \; a_{n,d}^{(5)} = a_{1,d}^{(5)} + \frac{d}{12}n^2(n-1)^2(2n^2-2n-1),$$

$$a_{n,d}^{(6)} = a_{1,d}^{(6)} + \frac{d}{42}n(n-1)(2n-1)(3n^4-6n^3+3n+1),$$

$$a_{n,d}^{(7)} = a_{1,d}^{(7)} + \frac{d}{24}n^2(n-1)^2(3n^4-6n^3-n^2+4n+2).$$

2. Подмножества простых чисел, порождаемые обобщенными линейными арифметическими прогрессиями

Пусть p — нечетное простое число, то есть $p \in P\backslash 2$, где P — множество всех простых чисел, а d — четное положительное число ($d = 2m$, $m \in \mathbb{N}$). Линейная ОАП $M_{p,d}^{(1)} = \{a_{1,p,d}^{(1)}, a_{2,p,d}^{(1)}, \ldots, a_{n,p,d}^{(1)}, \ldots\}$, определяемая рекуррентной формулой $a_{n+1,p,d}^{(1)} = a_{n,p,d}^{(1)} + nd$, где $a_{1,p,d}^{(1)} \overset{\text{def}}{=} p$, порождает подмножество $M_{h,p,d}^{(1)} = \{a_{1,p,d}^{(1)}, a_{2,p,d}^{(1)}, \ldots, a_{h,p,d}^{(1)}\}$ $h \geqslant 1$ простых чисел. Число h однозначно определяется заданием чисел p и d, то есть $h = h(p, d)$.

Использование компьютерной программы [1, с. 80] на базе пакета программ Maple V Release 4.00 позволяет выделить такие пары натуральных чисел p и d ($p \in P\backslash 2$, $d = 2m$, $m \in \mathbb{N}$), для которых $h \geqslant s \in \mathbb{N}$, где s — фиксированное натуральное число. Доказано, что для $p \leqslant 95467$, $d \leqslant 108$, $s = 15$ существует 18 подмножеств $M_{h,p,d}^{(1)}$ $h \geqslant 15$ простых чисел

$$M^{(1)}_{16,17,2},\ M^{(1)}_{15,17,6},\ M^{(1)}_{16,17,14},\ M^{(1)}_{18,19,4},\ M^{(1)}_{22,23,6},\ M^{(1)}_{29,31,12},\ M^{(1)}_{40,41,2},$$
$$M^{(1)}_{16,47,50},\ M^{(1)}_{15,607,34},\ M^{(1)}_{18,653,8},\ M^{(1)}_{15,1381,106},\ M^{(1)}_{15,1777,84},\ M^{(1)}_{16,2383,28}, \qquad (2.1)$$
$$M^{(1)}_{15,19219,54},\ M^{(1)}_{15,19249,84},\ M^{(1)}_{15,28591,12},\ M^{(1)}_{15,53117,54},\ M^{(1)}_{17,67391,36}.$$

Для каждого из этих подмножеств однозначно определяется квадратный трехчлен $f_{p,d}(x) \equiv (d/2)x(x-1)+p$, числовые значения которого при $x = 0, 1, 2, \ldots, h$ — простые числа:

$$x(x-1)+17\ (x=\overline{0,16}),\ 3x(x-1)+17\ (x=\overline{0,15}),\ 7x(x-1)+17\ (x=\overline{0,16}),$$
$$4x(x-1)+19\ (x=\overline{0,18}),\ 3x(x-1)+23\ (x=\overline{0,22}),\ 6x(x-1)+31\ (x=\overline{0,29}),$$
$$x(x-1)+41\ (x=\overline{0,40}),\ 25x(x-1)+47\ (x=\overline{0,16}),\ 17x(x-1)+607\ (x=\overline{0,15}),$$
$$4x(x-1)+653\ (x=\overline{0,18}),\ 53x(x-1)+1381\ (x=\overline{0,15}),\ 42x(x-1)+1777\ (x=\overline{0,15}),$$
$$42x(x-1)+19249\ (x=\overline{0,15}),\ 6x(x-1)+28591\ (x=\overline{0,15}),$$
$$27x(x-1)+53117\ (x=\overline{0,15}),\ 18x(x-1)+67391\ (x=\overline{0,17}).$$

Среди подмножеств (2.1) особую роль играет подмножество $M^{(1)}_{40,41,2}$. Оно образовано следующими 40 простыми числами:

$$41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223,$$
$$251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743,$$
$$797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601.$$

Такие же числовые значения принимают 40 квадратных трехчленов $f_a(x) \equiv x^2 - ax + 0,25(a^2+163)$, где a — произвольное нечетное натуральное число, меньшее 81 (см.: [5, с. 6]).

3. Подмножества простых чисел, порождаемые нелинейными обобщенными арифметическими прогрессиями

Для выделения подмножеств простых чисел, порожденных ОАП степени $k \geqslant 2$, используется компьютерная программа [2, с. 72], написанная в пакете Maple V Release 4.00, определяющая все подмножества

$$M^{(k)}_{h,p,d} = \{a^{(k)}_{1,p,d}, a^{(k)}_{2,p,d}, \ldots, a^{(k)}_{h,p,d}\}\ \ (a^{(k)}_{1,p,d} \overset{\text{def}}{=} p \in P \setminus 2) \qquad (3.1)$$

простых чисел для $p < 10^4$, $d = 2m \leqslant 200$, $h \geqslant 5$. Например, подмножества (3.1), порождаемые ОАП $M^{(2)}_{271,108}$, $M^{(3)}_{3631,70}$, $M^{(4)}_{241,30}$, $M^{(5)}_{1453,28}$, $M^{(6)}_{4241,42}$, $M^{(7)}_{3391,70}$, состоят соответственно из 12, 14, 11, 10, 7, 10 простых чисел:

$$M^{(2)}_{12,271,108} = \{271, 379, 811, 1783, 3511, 6211, 10099, 13391, 22303, 31051, 41851, 54919\},$$
$$M^{(3)}_{14,3631,70} = \{3631, 3701, 4261, 6151, 10631, 19381, 34501, 58511,$$
$$94351, 45381, 215381, 308551, 429511, 583301\},$$
$$M^{(4)}_{11,241,30} = \{241, 271, 751, 3181, 10861, 29611, \qquad (3.2)$$
$$68491, 140521, 263401, 460231, 760231\},$$

$$M^{(5)}_{10,1453,28} = \{1453, 1481, 2377, 9181, 37853, 125353, 343081, 813677, 1731181, 3384553\},$$

$$M^{(6)}_{7,4241,42} = \{4241, 4283, 6971, 37589, 209621, 865871, 2825423\},$$

$$M^{(7)}_{10,3391,70} = \{3391, 3461, 12421, 165511, 1312391, 6781141, 26376661, 84024671, 230825311, 565633141\}. \quad (3.2)$$

ОАП $M^{(2)}_{271,108}$, $M^{(3)}_{3631,70}$, $M^{(4)}_{241,30}$, $M^{(5)}_{1453,28}$, $M^{(6)}_{4241,42}$, $M^{(7)}_{3391,70}$ определяют многочлены, задающие подмножества (3.2) простых чисел:

$$18x(x-1)(2x-1)+271 \ (x=\overline{0,12}),\ \frac{35}{2}x^2(x-1)^2+3631 \ (x=\overline{0,14}),$$

$$x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)+241 \ (x=\overline{0,11}),\ \frac{7}{3}x^2(x-1)(2x^2-2x-1)+1453 \ (x=\overline{0,10}),$$

$$x(x-1)(2x-1)(3x^4-6x^2+3x+1)+4241 \ (x=\overline{0,7}),$$

$$\frac{35}{12}x^2(x-1)^2(3x^4-6x^3-x^2+4x+2)+3391 \ (x=\overline{0,10}).$$

Анализируя выделенные подмножества $M^{(k)}_{h,p,d}$ простых чисел со значениями $5 \leqslant h \leqslant 14$, убеждаемся, что число таких подмножеств для нечетной степени k значительно больше, чем для четной (см.: [2], с. 76), причем для $k > 7$ нет ни одного подмножества с десятью и более простыми числами, то есть при $7 < k \leqslant 14$ всегда $h \leqslant 9$.

Список литературы

1. *Малаховский В. С.* Об одной рекуррентной формуле, порождающей подмножества простых чисел // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2004. Вып. 35. С. 79—84.

2. *Малаховский В. С.* Подмножества простых чисел в обобщенных арифметических прогрессиях высших степеней// Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 74—79.

3. *Malakhovsky V. S., Malakhovsky N. V.* Prime numbers in the generalized geometrical arithmetical progressions // Избранные вопросы современной математики. Калининград, 2005. С. 33—35.

4. *Математический* энциклопедический словарь. М., 1995.

5. *Малаховский В. С.* Введение в математику. Калининград, 2006.

Об авторе

Владислав Степанович Малаховский — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, e-mail: nikolaymal@mail.ru.

Author

Professor Vladislav Malakhovsky — I. Kant Baltic Federal University, e-mail: nikolaymal@mail.ru.